EXERCICE N°3 : 5 points

Dans l'espace E, rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points : $A(1,0,1)$, $B(-1,2,2)$ et $C(-1,0,1)$. Soient le plan P passant par *A*, *B* et *C* et le plan Q : $2x-2y-z-4=0$.

A/1) a) Vérifier que *ABC* est un triangle rectangle en *C*.

b) Montrer $P : y-2z+2=0$ et Vérifier que $P \perp Q$.

2) Déterminer une représentation paramétrique de l'axe Δ du cercle C circonscrit au triangle ABC.

3) Soit *M* un point quelconque de Δ. Calculer la distance du point *M* au plan Q.

4) Montrer qu'il existe exactement deux sphères S_1 et S_2 passant par les points *A*, *B* et *C* et tangentes au plan Q. Pour chacune des deux sphères, on précisera le rayon et le centre.

B/ Soit l'ensemble S des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-2y-3z+1=0$:

1) Montrer que S est une sphère passant par *A* , *B* et *C*.

2) Montrer que $S \cap Q = \varnothing$.

3) Déterminer les plans K_1 et K_2 parallèles à Q et qui coupent S selon deux cercles de rayon 1.

EXERCICE N°4 : 6 points

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}x^2(1-\ln x)+1 \quad si\ x\in]0,+\infty[\\ f(0)=1 \end{cases}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0 .

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 . Interpréter graphiquement le résultat.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

d) Justifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $f'(x)=x\left(\frac{1}{2}-\ln x\right)$.

e) Dresser le tableau de variations de f .

f) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$ et que $3,27<\alpha<3,28$.

2) Donner une équation cartésienne de la tangente T à C au point d'abscisse 1 .

3) Dans la figure ci-dessous , on a représenté la courbe Γ de la fonction ln, et les courbes C_g et C_h représentations graphiques respectivement de la fonction g et h définies sur $[0,+\infty[$ par :

$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x-1$ et $h(x)=\frac{1}{4}x^2+1$.

a) Placer sur la figure les points $A\left(\sqrt{e},\frac{1}{2}\right)$ et $B\left(\sqrt{e},f\left(\sqrt{e}\right)\right)$.

b) Par une lecture graphique , étudier la position relative de C et T .

c) Vérifier que $g(\alpha)=-\frac{1}{2}\alpha-1$ puis Placer le point $H(\alpha,f(\alpha))$.